دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

تمرین سری اول — موعد تحویل: ۸ اسفند

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به این شکل است:

- مسائل ۱ تا ۷: هر کدام ۱۰ امتیاز
- مسئله ۸: ۱۵ امتیاز
- مسئله ۹: ۱۵ امتیاز + ۵ امتیاز اضافه

مسئله‌ی ۱.

دو متحرک در $x = 0$ شروع به حرکت می‌کنند. در هر گام هرکدام از آن‌ها با احتمال برابر به راست یا چپ حرکت می‌کنند. در ضمن گام‌های هر کدام از متحرک‌ها از گام‌های قبلی‌شان و همچنین از گام‌های یکدیگر مستقل فرض می‌شود. احتمال اینکه بعد از N گام در یک نقطه باشند چقدر است؟

جواب.

در ابتدا مسئله را با مسئله دیگری مدل می‌کنیم. می‌دانیم که در این بازی فقط فاصله این دو متحرک اهمیت دارد؛ یعنی اگر دو متحرک فاصله‌ای برابر با ۰ داشته باشند کفایت می‌کند و اهمیتی ندارد که در کدام خانه قرار دارند. به این ترتیب مبدا بازی را از $x = 0$ به مکان نفر اول تغییر می‌دهیم. در این شرایط نفر اول هیچ حرکتی ندارد و همواره ثابت است و هرگاه در بازی اصلی نفر اول به چپ حرکت می‌کند، نفر دوم در بازی جدید به راست حرکت می‌کند و برعکس. بنابراین شرح بازی جدید به صورت زیر است:

یک متحرک از خانه صفر شروع به حرکت می‌کند و در هر بار حرکت به احتمال برابر به سمت یکی از خانه‌های چپ یا راست خود می‌رود. این کار را برای $2N$ بار انجام می‌دهد. احتمال اینکه در پایان به خانه صفر باز گردد چقدر است؟

دقت کنید که حل مسئله جایگزین برابر با حل مسئله اصلی می‌باشد. حال به این دقت می‌کنیم که جواب مسئله برابر با رشته‌هایی از L و R به طول $2N$ است که در آن تعداد L و R برابر می‌باشد. بنابراین برای پیدا کردن جواب مسئله، کافی است تعداد رشته‌هایی از L و R که تعداد L و R های برابری دارند را بر تعداد کل رشته‌هایی از L و R تقسیم کنیم. این مقدار برابر است با

$$\frac{\binom{2N}{N}}{2^{2N}}$$

که جواب نهایی مسئله است.

مسئله‌ی ۲ .

یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A, B, C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$A =$ عدد تاس اول ۲ باشد

$B =$ جمع اعداد دو تاس ۷ باشد

$C =$ عدد تاس دوم ۳ باشد

گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- A و B مستقل‌اند.
- A و C مستقل‌اند.
- B و C مستقل‌اند.
- A و B و C مستقل‌اند.

جواب.

برای بررسی استقلال ۲ پیشامد A_1, A_2 کافی است شرط زیر برقرار باشد.

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

اما برای استقلال ۳ پیشامد A_1, A_2, A_3 باید ۴ شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\\
\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_3)\\
\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_2 \cap A_3)\\
\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$

- داریم:

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

لذا A و B مستقل‌اند.

- با توجه به اینکه پرتاب‌ها مستقل از هم هستند، A و C مستقل‌اند.
- داریم:

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳۶} = \mathbb{P}(B \cap C)$$

پس B و C مستقل‌اند.

- با توجه به اینکه اشتراک آن‌ها تهی می‌باشد و هرکدام احتمال غیرصفر دارند، مستقل نیستند.

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} \neq ۰ = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

دقت کنید که در این سوال، سه پیشامد ۲ به ۲ مستقل بودند؛ اما به طور کلی از هم مستقل نبودند.

مسئله‌ی ۳.

آلیس و باب قصد دارند از طریق اینترنت باهم ارتباط برقرار کنند اما مشکل اینجاست که همیشه پیام دلخواه آن‌ها ارسال نمی‌شود. فرض کنید آن‌ها برای ارتباط برای یکدیگر فقط ۰ و ۱ ارسال می‌کنند. هر بیت ۱ که آلیس ارسال می‌کند به احتمال ۰/۲ تبدیل به ۰ شده و به همین ترتیب هر بیت ۰ که ارسال می‌کند به احتمال ۰/۳ به یک تغییر می‌کند. در ضمن ارسال بیت‌های صفر و یک توسط آلیس هم‌احتمال هستند.

- احتمال اینکه باب ۱ دریافت کند را حساب کنید.
- اگر باب ۰ دریافت کند، احتمال این را حساب کنید که آلیس ۰ ارسال کرده باشد.

جواب.

فرض کنید بیت ارسالی توسط آلیس را با A و بیت دریافتی توسط باب را با B نشان دهیم.

- برای قسمت اول سوال می‌توان نوشت:

$$\mathbb{P}(B = ۱) = \mathbb{P}(B = ۱|A = ۰)\mathbb{P}(A = ۰) + \mathbb{P}(B = ۱|A = ۱)\mathbb{P}(A = ۱) = \frac{۱۱}{۲۰}$$

- برای قسمت دوم سوال داریم:

$$\mathbb{P}(A = ۰|B = ۰) = \frac{\mathbb{P}(B = ۰|A = ۰)\mathbb{P}(A = ۰)}{\mathbb{P}(B = ۰|A = ۱)\mathbb{P}(A = ۱) + \mathbb{P}(B = ۰|A = ۰)\mathbb{P}(A = ۰)} = \frac{۷}{۹}$$

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید یک نفر حروف دو کلمه **تمرین** و **اول** را درون یک کاسه ریخته است و هر بار بدون جایگذاری یک حرف از درون این کاسه بیرون می‌آورد. چقدر احتمال دارد که کلمه **اول** زودتر ساخته شود. (دقت کنید که ترتیب خروج حروف اهمیتی ندارد)

جواب.

در ابتدا به این نکته توجه کنید که چون این دو کلمه حروف مشترکی ندارند، می‌توانیم کلمه **اول** را با ۳ توپ قرمز و کلمه **تمرین** را با ۵ توپ آبی جایگزین کنیم و احتمال این را حساب کنیم که ۳ توپ قرمز زودتر از ۵ توپ آبی دیده شود.
تنها در شرایطی این اتفاق می‌افتد که موقع انتخاب‌کردن توپ‌ها، اخرین توپ آبی باشد.
تعداد حالاتی که آخرین توپ برابر با آبی باشد برابر است با $\binom{۵}{۱} \times ۷!$ و تعداد کل حالات برابر است با $۸!$. در نتیجه جواب مسئله برابر خواهد بود با $\frac{\binom{۵}{۱}\times ۷!}{۸!} = \frac{۵}{۸}$.

مسئله‌ی ۵.

امیرحسین و پویا تصمیم به یک بازی می‌گیرند. امیرحسین n سکه و پویا $n+۱$ سکه دارد و آن‌ها را پرتاب می‌کنند. امیرحسین در صورتی برنده می‌شود که تعدادی بیشتر یا مساوی خط در پرتاب‌هایش نسبت به پویا داشته باشد. احتمال برنده شدن امیرحسین چقدر است؟

جواب.

بر روی سکه آخر پویا حالت بندی می‌کنیم. پیشامد A پیشامدی است که امیرحسین در n سکه اول بیشتر یا مساوی خط داشته باشد و پیشامد B این است که امیرحسین در n سکه اول تعداد بیشتری خط داشته باشد. پیشامد A برای زمانی است که سکه اخر پویا شیر باشد و B زمانی است که سکه آخر پویا خط باشد.

$$\mathbb{P}(\text{برد امیرحسین}) = \frac{۱}{۲}\mathbb{P}(A) + \frac{۱}{۲}\mathbb{P}(B)$$

حال پیشامد C را تعریف میکنیم. این پیشامد برابر با این است که پویا در n پرتاب اول تعداد بیشتری خط داشته باشد. دقت کنید که این پیشامد مکمل پیشامد A است و داریم

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) = ۱ \tag{۱}$$

همینطور بنابر تقارن بدست آمده احتمال پیشامد B و C برابر است. منظور از تقارن این است که در n سکه اول، چون تعداد سکه‌ها برابر است احتمال اینکه هرکدام از بازیکن‌ها تعداد خط بیشتری از دیگری داشته باشد برابر است. بنابراین داریم

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) \tag{۲}$$

از معادلات ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = ۱$$

در نهایت جواب مسئله به صورت زیر بدست می‌آید

$$\mathbb{P}(\text{برد امیرحسین}) = \frac{۱}{۲}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)) = \frac{۱}{۲}$$

مسئله‌ی ۶.

یک سیستم مخابراتی از n آنتن تشکیل شده است که به طور خطی کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. m تا از آن‌ها معیوب هستند و این آنتن‌ها به صورت کاملا تصادفی چیده شده‌اند.

- سیستم تا زمانی قادر به کار است که هیچ دو آنتن متوالی معیوب نباشد. در این صورت، احتمال فعال بودن سیستم چقدر است؟
- اگر سیستم فقط وقتی کار کند که بین هر دو آنتن معیوب حداقل دو آنتن سالم قرار گرفته باشند، احتمال فعال بودن سیستم چقدر است؟

جواب.

در ابتدا به توضیحات حل مسئله می‌پردازیم و سپس هر حالت را جداگانه حل می‌کنیم. تعداد کل حالات $\binom{n}{m}$ و فضا هم‌احتمال می‌باشد. بنابراین برای بدست‌آوردن احتمال‌های خواسته‌شده کافی است تعداد حالات مطلوب را پیدا کنیم.

همینطور توجه داشته باشید که تعداد حالات مختلف $x_۱, \dots, x_k$ به طوری که $x_۱ + \cdots + x_k = n$ و هرکدام از x_i ها نامنفی باشد برابر است با

$$\binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{n+k-۱}{n}$$

از این رابطه در طول راه‌حل استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید که تمام آنتن‌ها در یک خط قرار دارند. تعداد آنتن‌های سالم قبل از اولین آنتن معیوب را با $x_۱$، تعداد آنتن‌های سالم بین اولین و دومین آنتن معیوب را با $x_۲$ و در نهایت تعداد آنتن‌های سالم بعد آنتن معیوب آخر را به $x_{m+۱}$ نشان می‌دهیم. در هر کدام از زیرمسئله‌ها باید داشته باشیم

$$\sum_{i=۱}^{m+۱} x_i = n - m$$

- در این زیرمسئله باید داشته باشیم

$$x_۲, \dots, x_m \geqslant ۱$$

هرکدام از $x_۲, \dots, x_m$ را به صورت $x_i = y_i + ۱$ بازنویسی می‌کنیم که به مسئله معادل زیر می‌رسیم

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_m + x_{m+۱} + (m-۱) = n - m$$

$$\rightarrow x_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_m + x_{m+۱} = n - ۲m + ۱$$

در اینجا تمامی متغیرها باید نامنفی باشند. بنابراین جواب این قسمت برابر است با

$$\frac{\binom{n-m+۱}{m}}{\binom{n}{m}}$$

- در این زیرمسئله باید داشته باشیم

$$x_۲, \ldots, x_m \geqslant ۲$$

هرکدام از $x_۲, \ldots, x_m$ را به صورت $x_i = y_i + ۲$ بازنویسی می‌کنیم که به مسئله معادل زیر می‌رسیم

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_m + x_{m+۱} + ۲(m-۱) = n - m$$

$$\rightarrow x_۱ + y_۲ + y_۳ + \cdots + y_m + x_{m+۱} = n - ۳m + ۲$$

بنابراین جواب این قسمت برابر است با

$$\frac{\binom{n-۲m+۲}{m}}{\binom{n}{m}}$$

مسئله‌ی ۷.

در یک کاسه n توپ قرمز و m توپ آبی وجود دارد. توپ‌ها را تا زمانی که r توپ قرمز دیده باشیم خارج می‌کنیم. احتمال اینکه در کل k توپ دیده باشیم را محاسبه کنید. ($r \leqslant n$ و $k \geqslant r$)

راهنمایی. احتمال این را محاسبه کنید که در $k-۱$ توپی که برمیداریم $r-۱$ توپ قرمز وجود داشته باشد و همینطور توپ بعدی که برمیداریم هم قرمز باشد.

جواب.

به دلیل هم‌احتمال بودن این فضای احتمال، برای اینکه احتمال خواسته شده را بدست آوریم، کافی است که تعداد حالات مطلوب را به تعداد کل حالات تقسیم کنیم. با استفاده از راهنمایی تعداد حالاتی که از $k-۱$ توپی که برمیداریم، دقیقا $r-۱$ تا از آن‌ها قرمز باشد، برابر است با

$$\binom{n}{r-۱}\binom{m}{k-r}(k-۱)!$$

حال باید توپ شماره k را قرار دهیم و می‌دانیم رنگ آن باید قرمز باشد. تعداد توپ های قرمز باقی مانده برابر است با $n-r+۱$. بنابراین تعداد کل حالات مطلوب ما برابر است با

$$\binom{n}{r-۱}\binom{m}{k-r}(k-۱)!(n-r+۱)$$

دقت کنید که تعداد کل حالات نیز برابر است با

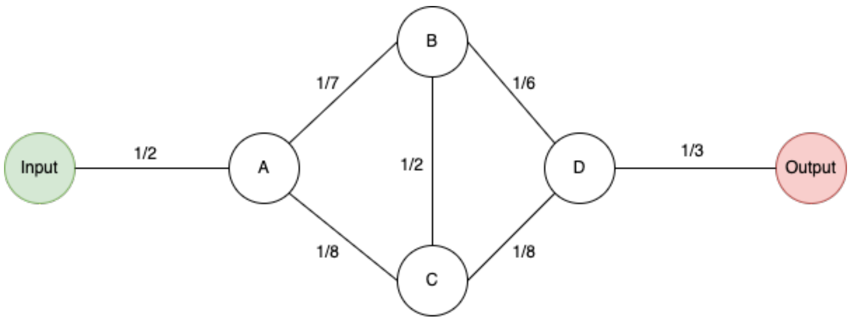
$$\binom{n+m}{k}k!$$

در نهایت برای بدست آوردن احتمال نهایی تعداد حالات مطلوب را به تعداد کل حالات تقسیم می‌کنیم. جواب مسئله برابر است با:

$$\frac{\binom{n}{r-۱} \times \binom{m}{k-r}(n-r+۱)}{\binom{m+n}{k-۱}(n+m-k+۱)}$$

مسئله‌ی ۸.

۷ کلید مختلف برای انتقال یک سیگنال بین ورودی و خروجی یک شبکه وجود دارد که متناظر با یال‌های گراف زیر می‌باشند. هریک از کلیدها ممکن است به احتمالی که روی آن نوشته شده است باز باشد. برای احتمال انتقال سیگنال از ورودی به خروجی یک کران بالا پیدا کنید (**راهنمایی:** از کران اجتماع استفاده نمایید).



جواب.

چهار پیشامد زیر را در نظر بگیرید.

- $\mathcal{A}_۱$ احتمال اینکه مسیر input-A-B-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_۲$ احتمال اینکه مسیر input-A-B-C-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_۳$ احتمال اینکه مسیر input-A-C-D-output باز باشد.
- $\mathcal{A}_۴$ احتمال اینکه مسیر input-A-C-B-D-output باز باشد.

بنابراین احتمال باز بودن کل مسیر برابر خواهد بود با :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}_۱ \cup \cdots \cup \mathcal{A}_۴) &\leqslant P(\mathcal{A}_۱) + \cdots + P(\mathcal{A}_۴) \\ &= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۷}\frac{۱}{۶}\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۷}\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۸}\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۸}\frac{۱}{۸}\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۸}\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۶}\frac{۱}{۳} \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۹.

خانواده‌ای n فرزند دارد که $n \geqslant ۲$. فرض کنیم احتمال دختر یا پسر بودن هر فرزند برابر $\frac{۱}{۲}$ و مستقل از جنسیت سایر فرزندان باشد. در هر یک از قسمت‌های زیر یک مشاهده به ثبت رسیده است. برای هر مشاهده، احتمال دختر بودن تمام فرزندان خانواده با داشتن آن مشاهده را محاسبه نمایید (دقت کنید که هر قسمت را مستقل از سایر قسمت‌ها مورد بررسی قرار دهید.)

الف) می‌دانیم که این خانواده حداقل یک فرزند دختر دارد.

ب) به خانه‌ی این خانواده می‌رویم و یکی از فرزندان آن‌ها را به تصادف می‌بینیم(در حالی که بقیه فرزندان حضور ندارند). فرزند مشاهده شده دختر است.

ج) (**امتیازی**) می‌دانیم این خانواده دختری به نام مریم دارد. فرض می‌کنیم اگر فرزندی دختر باشد، احتمال اینکه نام وی مریم باشد β است که $۱ \gg \beta > ۰$ (احتمال وجود پسری با این نام برابر ۰ است!).

جواب.

الف) فرض کنیم A پیشامد دختر بودن تمام فرزندان، B پیشامد دختر بودن حداقل یکی از فرزندان و C پیشامد پسر بودن تمام فرزندان خانواده باشد. می‌خواهیم $P(A|B)$ را به دست آوریم.

$$P(A) = P(C) = \frac{۱}{۲^n}$$
$$P(B) = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۱}{۲^n}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۲^n}}{۱ - \frac{۱}{۲^n}} = \frac{۱}{۲^n - ۱}$$

ب) اگر $P(g)$ احتمال دختر بودن فرزندی که به صورت تصادفی مشاهده کردیم باشد و $P(A)$ احتمال دختر بودن تمام فرزندان باشد خواهیم داشت :

$$P(G|A) = ۱ \ , \ \ P(A) = \tfrac{۱}{۲^n} \ \ , \ \ P(G) = \tfrac{۱}{۲}$$
$$P(A|G) = \tfrac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \tfrac{۱ . \frac{۱}{۲^n}}{\frac{۱}{۲}} = \tfrac{۱}{۲^{n-۱}}$$

ج) فرض کنیم M پیشامد "مریم" بودن نام حداقل یکی از دختران خانواده بوده و G پیشامد دختر بودن تمام فرزندان خانواده باشد. خواهیم داشت :

$$P(G|M) = \tfrac{P(G \cap M)}{P(M)} = ?$$
$$P(G \cap M) = P(G) - P(G \cap \overline{M}) = (\tfrac{۱}{۲})^n - (\tfrac{۱}{۲} * (۱ - \beta))^n$$
$$P(M) = ۱ - P(\overline{M}) = ۱ - (\tfrac{۱}{۲} * (۱ - \beta) + \tfrac{۱}{۲} * ۱)^n = ۱ - (۱ - \tfrac{\beta}{۲})^n$$

خط آخر از آنجا بدست می‌آید که احتمال اینکه نام یکی از فرزندان مریم نباشد برابر با متمم جمع احتمال مریم بودن

نام فرزند در صورت دختر و پسر بودن است.

$$P(G|M) = \frac{(\frac{۱}{۲})^n(۱-(۱-\beta)^n)}{۱-(۱-\frac{\beta}{۲})^n}$$
$$\overset{\beta \ll ۱}{\rightarrow} \frac{(\frac{۱}{۲})^n(n\beta))}{\frac{n}{۲}\beta} = (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

موفق باشید :)