



آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

تمرین سری اول

موعد تحویل: ۸ اسفند

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به این شکل است:

- مسائل ۱ تا ۷: هر کدام ۱۰ امتیاز
- مسئله ۸: ۱۵ امتیاز
- مسئله ۹: ۱۵ امتیاز + ۵ امتیاز اضافه

مسئله‌ی ۱.

دو متحرک در $x = 0$ شروع به حرکت می‌کنند. در هر گام هرکدام از آن‌ها با احتمال برابر به راست یا چپ حرکت می‌کنند. در ضمن گام‌های هر کدام از متحرک‌ها از گام‌های قبلی‌شان و همچنین از گام‌های یکدیگر مستقل فرض می‌شود. احتمال اینکه بعد از N گام در یک نقطه باشند چقدر است؟

مسئله‌ی ۲.

یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. پیشامدهای A, B, C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

A = عدد تاس اول ۲ باشد

B = جمع اعداد دو تاس ۷ باشد

C = عدد تاس دوم ۳ باشد

گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- A و B مستقل اند.
- A و C مستقل اند.
- B و C مستقل اند.
- A و B و C مستقل اند.

مسئله ۳.

آلیس و باب قصد دارند از طریق اینترنت باهم ارتباط برقرار کنند اما مشکل اینجاست که همیشه پیام دلخواه آن‌ها ارسال نمی‌شود. فرض کنید آن‌ها برای ارتباط برای یکدیگر فقط ۰ و ۱ ارسال می‌کنند. هر بیت ۱ که آلیس ارسال می‌کند به احتمال $\frac{1}{2}$ تبدیل به ۰ شده و به همین ترتیب هر بیت ۰ که ارسال می‌کند به احتمال $\frac{1}{3}$ به یک تغییر می‌کند. در ضمن ارسال بیت‌های صفر و یک توسط آلیس هم‌احتمال هستند.

- احتمال اینکه باب ۱ دریافت کند را حساب کنید.
- اگر باب ۰ دریافت کند، احتمال این را حساب کنید که آلیس ۰ ارسال کرده باشد.

مسئله ۴.

فرض کنید یک نفر حروف دو کلمه تمرین و اول را درون یک کاسه ریخته است و هر بار بدون جایگذاری یک حرف از درون این کاسه بیرون می‌آورد. چقدر احتمال دارد که کلمه اول زودتر ساخته شود. (دقت کنید که ترتیب خروج حروف اهمیتی ندارد)

مسئله ۵.

امیرحسین و پویا تصمیم به یک بازی می‌گیرند. امیرحسین n سکه و پویا $n + 1$ سکه دارد و آن‌ها را پرتاب می‌کنند. امیرحسین در صورتی برنده می‌شود که تعدادی بیشتر یا مساوی خط در پرتاب‌هایش نسبت به پویا داشته باشد. احتمال برنده شدن امیرحسین چقدر است؟

مسئله ۶.

یک سیستم مخابراتی از n آنتن تشکیل شده است که به طور خطی کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. m تا از آن‌ها معیوب هستند و این آنتن‌ها به صورت کاملاً تصادفی چیده شده‌اند.

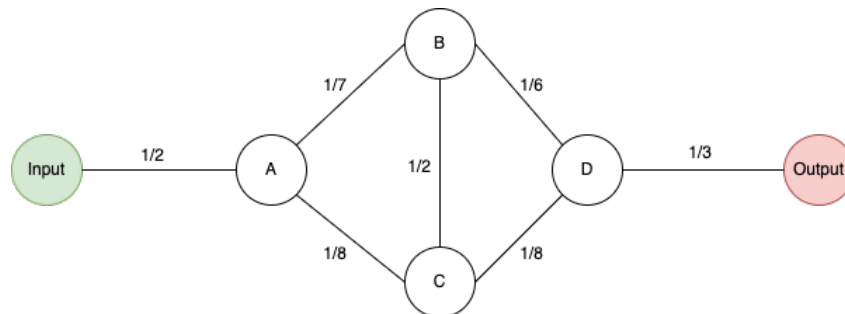
- سیستم تا زمانی قادر به کار است که هیچ دو آنتن متوالی معیوب نباشد. در این صورت، احتمال فعال بودن سیستم چقدر است؟
- اگر سیستم فقط وقتی کار کند که بین هر دو آنتن معیوب حداقل دو آنتن سالم قرار گرفته باشند، احتمال فعال بودن سیستم چقدر است؟

مسئله ۷.

در یک کاسه n توپ قرمز و m توپ آبی وجود دارد. توپ‌ها را تا زمانی که r توپ قرمز دیده باشیم خارج می‌کنیم. احتمال اینکه در کل k توپ دیده باشیم را محاسبه کنید. ($r \leq n$ و $k \geq r$)
راهنمایی: احتمال این را محاسبه کنید که در $k - 1$ توپی که برمی‌داریم $r - 1$ توپ قرمز وجود داشته باشد و همینطور توپ بعدی که برمی‌داریم هم قرمز باشد.

مسئله ۸.

۷ کلید مختلف برای انتقال یک سیگنال بین ورودی و خروجی یک شبکه وجود دارد که متناظر با یال‌های گراف زیر می‌باشند. هریک از کلیدها ممکن است به احتمالی که روی آن نوشته شده است باز باشد. برای احتمال انتقال سیگنال از ورودی به خروجی یک کران بالا پیدا کنید (راهنمایی: از کران اجتماع استفاده نمایید).



مسئله ۹.

خانواده‌ای n فرزند دارد که $n \geq 2$. فرض کنیم احتمال دختر یا پسر بودن هر فرزند برابر $\frac{1}{2}$ و مستقل از جنسیت سایر فرزندان باشد. در هر یک از قسمت‌های زیر یک مشاهده به ثبت رسیده است. برای هر مشاهده، احتمال دختر بودن تمام فرزندان خانواده با داشتن آن مشاهده را محاسبه نمایید (دقت کنید که هر قسمت را مستقل از سایر قسمت‌ها مورد بررسی قرار دهید).

الف) می‌دانیم که این خانواده حداقل یک فرزند دختر دارد.

ب) به خانه‌ی این خانواده می‌رویم و یکی از فرزندان آن‌ها را به تصادف می‌بینیم (در حالی که بقیه فرزندان حضور ندارند). فرزند مشاهده شده دختر است.

ج) (امتیازی) می‌دانیم این خانواده دختری به نام مریم دارد. فرض می‌کنیم اگر فرزندی دختر باشد، احتمال اینکه نام وی مریم باشد β است که $0 < \beta \ll 1$ (احتمال وجود پسری با این نام برابر ۰ است!).

موفق باشید (:)