آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری دوم — زمان تحویل: ۲۸ اسفند

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به شکل زیر است: (مجموعا ۱۰۰ نمره)

- سوال ۱: ۱۲ امتیاز
- سوال ۲: ۱۰ امتیاز
- سوال ۳: ۱۵ امتیاز
- سوال ۴: ۱۲ امتیاز
- سوال ۵: ۱۰ امتیاز
- سوال ۶: ۱۰ امتیاز
- سوال ۷: ۹ امتیاز
- سوال ۸: ۱۰ امتیاز
- سوال ۹: ۱۲ امتیاز

مسئله‌ی ۱. (چگالی و تجمع)

متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر داده شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-\lambda(x-1)}, & x > 1 \\ b, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ ce^{\lambda(x+1)}, & x < -1 \end{cases}$$

به طوری که داریم: $\lambda > 0$.
الف) ثابت کنید $a + c = \lambda(1 - 2b)$
ب) تابع توزیع تجمعی را برای متغیر تصادفی X محاسبه نمایید.

مسئله‌ی ۲. (نخ‌های گره خورده)

فرض کنید n نخ داریم. می‌دانیم که هر نخ دو سر دارد؛ لذا کل نخ‌ها $2n$ سر خواهند داشت. به صورت تصادفی n زوج از سرهای این نخ‌ها را در نظر می‌گیریم و دو سرِ تشکیل‌دهنده‌ی هر زوج را به هم گره می‌زنیم. اگر تعداد حلقه‌های ایجادشده را با یک متغیر تصادفی مانند L نشان دهیم، مطلوب است $\mathbb{E}[L]$.

مسئله‌ی ۳. (میانگین و واریانس)

- T یک متغیر تصادفی گسسته است. به طوری که تابع جرم احتمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T = n) = \frac{A}{n \cdot 3^n},$$

که در آن A یک مقدار ثابت است.
الف) مقدار عددی ثابت A را بیابید.
ب) مقادیر $\mathbb{E}[T]$ و $\mathrm{Var}[T]$ را محاسبه کنید.

- متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید به طوری که

$$\forall n \in N \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{n!}$$

مقدار c را بیابید و سپس مقادیر $\mathbb{E}[X]$ و $\mathrm{Var}[X]$ را به دست آورید.

مسئله‌ی ۴. (قدِ نرمال)

فرض کنید قد مردان ۲۵ ساله یک متغیر تصادفی است که از توزیع نرمال با میانگین ۱۷۰ و واریانس ۱۰ پیروی کند.

الف) قد چند درصد از این مردان بیش از ۱۷۴ سانتی‌متر است؟

ب) چند درصد از مردانی که قد بیشتر یا مساوی ۱۶۰ سانتی‌متر دارند، قدشان کمتر از ۱۸۰ سانتی‌متر است؟

پ) اگر بدانیم که قد افراد مختلف مستقل است و از همین توزیع داده‌شده در سوال پیروی می‌کند (به بیان دیگر، اعداد متناظر قد آن‌ها متغیرهای تصادفی i.i.d باشند)، چقدر احتمال دارد که از میان یک گروه ۵ نفره از این مردان، حداقل نصف آن‌ها بیش از ۱۷۴ سانتی‌متر قد داشته باشند؟

مسئله‌ی ۵. (پواسون)

اگر X و Y دو متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda = ۲$ باشند و Z مینیمم آن‌ها را نشان دهد، مقدار $\mathbb{P}(Z \leqslant ۱)$ را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۶. (بی‌حافظگی)

متغیر تصادفی X دارای خاصیت بی‌حافظگی[۱] است؛ اگر داشته باشیم:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{۰\} \quad \mathbb{P}[X > n + m | X > n] = \mathbb{P}[X > m]$$

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، نشان دهید بی‌حافظه است؛ اگر و تنها اگر دارای توزیع هندسی باشد.

مسئله‌ی ۷. (چمدانِ پروفسور)

پروفسور سراجی با هواپیما از لس‌آنجلس به پاریس سفر می‌کند. برای این منظور، او ابتدا از فرودگاه لس‌آنجلس به نیویورک و سپس از آنجا به لندن می‌رود و در نهایت از لندن به پاریس می‌رسد. می‌دانیم احتمال آن که وسایل یک مسافر در هر یک از فرودگاه‌های لس‌آنجلس، نیویورک و لندن گم شود، p است. وقتی پروفسور به پاریس می‌رسد، متوجه می‌شود که چمدانش گم شده است. چقدر احتمال دارد که چمدانش در هر یک از فرودگاه‌های مذکور گم شده باشد؟

مسئله‌ی ۸. (نظریه بازی‌ها)

استاد درس نظریه بازی‌ها ایده جالبی برای آزمون میانترم به ذهنش رسیده است. او این آزمون را با k سوال برگزار می‌کند؛ اما یک راه کسب نمره تشویقی نیز برای آن در نظر گرفته است. اگر سوالی فقط توسط یک نفر حل شود، نمره آن برای او دو برابر حساب می‌شود.

می‌دانیم احتمال حل‌شدن هر سوال توسط هر فرد p است و این رویداد، هیچ‌گونه وابستگی به بقیه سوالات و افراد ندارد. استاد درس، برای هر سوال ۱ نمره در نظر گرفته و در زمان تصحیح، ممکن است کل نمره یا صفر را به پاسخ هر دانشجو اختصاص دهد (دقت کنید که حالت دیگری برای نمره‌دهی وجود ندارد). اگر کلاس n نفره باشد، امید ریاضی میانگین نمره کلاس در این آزمون را به دست آورید.

[۱] Memoryless Property

مسئله‌ی ۹. (چندجمله‌ای)

تابع توزیع تجمعی (CDF) متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر داده شده است:

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x < -۱ \\ Q(x) & -۱ \leqslant x \leqslant ۲ \\ ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

که در آن $Q(x)$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است. اگر بدانیم $P(۰ \leqslant X) = \frac{۲۶}{۲۷}$ و $P(X \leqslant ۱) = \frac{۸}{۲۷}$ ، آنگاه:

الف) $Q(x)$ را مشخص نمایید.

ب) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را به دست آورید.