# آمار و احتمال مهندسی

**نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲**

مدرس: دکتر امیر نجفی

**دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر**

زمان تحویل: ۳۰ فروردین

تمرین سری سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- همکاری و همفکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت همفکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام همفکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## مسئله‌ی ۱. مجذور شرطی

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی باشد و $Y = X^2$ بر حسب آن تعریف شود. درستی عبارت زیر را ثابت کنید:

$$f_Y(y|X \geqslant 0) = \frac{u(y)}{1 - F_X(0)} \cdot \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},$$

که در آن $u$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u(y) = \begin{cases} 1, & y \geqslant 0 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

**حل.**

ابتدا $P(Y \leqslant y|X \geqslant 0)$ را محاسبه میکنیم

$$P(Y \leqslant y|X \geqslant 0) = \frac{P(Y \leqslant y, X \geqslant 0)}{P(X \geqslant 0)} = \frac{P(Y \leqslant y, X \geqslant 0)}{1 - P(X < 0)} = \frac{P(Y \leqslant y, X \geqslant 0)}{1 - F_X(0)}$$

حال از آنجایی که شرط $Y = X^2$ را داریم آنگاه

$$\frac{P(Y \leqslant y, X \geqslant 0)}{1 - F_X(0)} = \frac{P(X^2 \leqslant y, X \geqslant 0)}{1 - F_X(0)} = \frac{P(X \leqslant \sqrt{y}, X \geqslant 0)}{1 - F_X(0)}$$

$$= \frac{P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X \leqslant \sqrt{y}, X \leqslant 0)}{1 - F_X(0)} = \frac{P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X \leqslant 0)}{1 - F_X(0)}$$

حال از دو طرف معادله نسبت به $y$ مشتق میگیریم.

$$\frac{dP(Y \leqslant y|X \geqslant 0)}{dy} = f_Y(y|X \geqslant 0) = \frac{d}{dy}\left(\frac{P(X \leqslant \sqrt{y}) - F_X(0)}{1 - F_X(0)}\right)$$

از آنجایی که $1 - F_X(0)$ تابع $y$ نیست میتوان آن را از مشتق بیرون آورد.

$$\frac{1}{1 - F_X(0)} \frac{dP(X \leqslant \sqrt{y} - F_X(0))}{dy} = \frac{1}{1 - F_X(0)} \frac{dP(X \leqslant \sqrt{y})}{d\sqrt{y}} \frac{d\sqrt{y}}{dy}$$

$$= \frac{1}{1-F_X(0)} f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

توجه کنید از آنجایی که توزیع بالا به ازای $y$ های مثبت تعریف میشود باید عبارت بالا را بصورت زیر نوشت

$$\frac{u(y)}{1-F_X(0)} \cdot \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = f_Y(y|X \geqslant 0)$$

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۲. بیمه

یک شرکت بیمه، خانه‌ها را در سه شهر A، B و C تحت پوشش خود قرار می‌دهد. می‌دانیم خسارات رخ‌داده در این شهرها مستقل هستند و توابع مولد گشتاور برای میزان خسارت در هر یک از شهرها به صورت زیر است:

$$M_A(t) = (1-2t)^{-3} \qquad M_B(t) = (1-2t)^{-2.5} \qquad M_C(t) = (1-2t)^{-4.5}$$

اگر $X$ مجموع خسارت در هر سه شهر باشد، $\mathbb{E}(X^3)$ را بدست آورید.

**حل.** در نظر بگیرید که $J$ و $K$ و $L$ میزان خسارت در هریک از شهرها می‌باشد. حال طبق تعریف صورت سوال داریم $X = J + K + L$. از آنجایی که میزان خسارت در هریک از شهرها از یکدیگر مستقل است پس $J$ و $K$ و $L$ از یکدیگر مستقل هستند. درنتیجه تابع مولد گشتاور برای $X$ که مجموع آن‌ها است برابر است با حاصل ضرب توابع مولد گشتاور آن‌ها. به عبارتی داریم:

$$M_X(t) = M_K(t)M_J(t)M_L(t) = (1-2t)^{-3-2.5-4.5} = (1-2t)^{-10}.$$

حالا از این تابع مولد گشتاور مشتقات اول تا سوم را محاسبه می‌کنیم:

$$M'_X(t) = (-2)(-10)(1-2t)^{-11},$$

$$M''_X(t) = (-2)^2(-10)(-11)(1-2t)^{-12},$$

$$M'''_X(t) = (-2)^3(-10)(-11)(-12)(1-2t)^{-13}.$$

حال خواسته سوال یا همان $E(X^3)$ برابر است با:

$$E(X^3) = M'''_X(0) = (-2)^3(-10)(-11)(-12) = 10,560.$$

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۳. درمان

فرض کنید دو نوع درمان برای سنگ کلیه وجود دارد: درمان $A$ و درمان $B$. همچنین در نظر بگیرید که جدول زیر، احتمال موفقیت این دو نوع درمان را نشان می‌دهد.

| | درمان A | درمان B |
|---|---|---|
| سنگ‌های کوچک | ۰.۹۳ | ۰.۸۷ |
| سنگ‌های بزرگ | ۰.۷۳ | ۰.۶۸ |

فرض کنید در کلیه هر بیمار، فقط سنگ‌های کوچک یا سنگ‌های بزرگ موجود است (هیچ بیماری هر دو نوع سنگ را در کلیه خود ندارد) و می‌دانیم احتمال اینکه سنگ‌ها کوچک یا بزرگ باشند، به ترتیب برابر ۰.۶ و ۰.۴ است.

پزشکان، بیمارانی را که کلیه آن‌ها شامل سنگ‌های کوچک باشد، در ٪۲۰ مواقع با روش $A$ درمان می‌کنند. آن‌ها همچنین بیمارانی را که کلیه آن‌ها شامل سنگ‌های بزرگ باشد، در ٪۸۰ مواقع با روش $A$ درمان می‌کنند. اگر برای درمان یک بیمار از روش $A$ استفاده نشود، حتما روش $B$ تجویز خواهد شد.

الف) اگر برای یک بیمار روش $A$ تجویز شده باشد، احتمال موفقیت درمان چقدر است؟

ب) اگر برای یک بیمار روش $B$ تجویز شده باشد، احتمال موفقیت درمان چقدر است؟

پ) به نظر شما کدام درمان بهتر است؟

**حل.** برای حل این مسأله، می‌توانیم از قانون احتمال کل و احتمال شرطی استفاده کنیم.

بگذارید:

S را رویداد موفقیت درمان در نظر بگیریم.

A را رویداد تجویز درمان A در نظر بگیریم.

B را رویداد تجویز درمان B در نظر بگیریم.

SS را رویداد داشتن سنگ‌های کوچک در نظر بگیریم.

SL را رویداد داشتن سنگ‌های بزرگ در نظر بگیریم.

$P(SS) = ۰/۶$ (احتمال داشتن سنگ‌های کوچک)

$P(SL) = ۰/۴$ (احتمال داشتن سنگ‌های بزرگ)

$P(A|SS) = ۰/۲$ (احتمال تجویز درمان A به شرط داشتن سنگ‌های کوچک)

$P(A|SL) = ۰/۸$ (احتمال تجویز درمان A به شرط داشتن سنگ‌های بزرگ)

حالا، بیایید محاسبه کنیم:

الف) احتمال موفقیت درمان در صورت تجویز درمان :A

$$P(S|A) = P(S|A \cap SS) \times P(SS) + P(S|A \cap SL) \times P(SL)$$
$$= (۰/۹۳ \times ۰/۲) \times ۰/۶ + (۰/۷۳ \times ۰/۸) \times ۰/۴$$
$$= ۰/۱۸۶ + ۰/۲۳۳۶$$
$$= ۰/۴۱۹۶$$

ب) احتمال موفقیت درمان در صورت تجویز درمان :B

$$P(S|B) = P(S|B \cap SS) \times P(SS) + P(S|B \cap SL) \times P(SL)$$
$$= (۰/۸۷ \times ۰/۸) \times ۰/۶ + (۰/۶۸ \times ۰/۲) \times ۰/۴$$
$$= ۰/۴۱۷۶ + ۰/۱۳۶$$
$$= ۰/۵۵۳۶$$

ج) مقایسه احتمال‌ها: - احتمال موفقیت با درمان A تقریباً برابر با ۴۱۹۶.۰ است. - احتمال موفقیت با درمان B تقریباً برابر با ۵۵۳۶.۰ است.

مقایسه این احتمال‌ها نشان می‌دهد که درمان B احتمال موفقیت بیشتری دارد، بنابراین بهترین گزینه به نظر می‌رسد. ▷

## مسئله‌ی ۴.  واریانس حرفه‌ای

الف) واریانس $Y$ به شرط $X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^{۲}|X).$$

ثابت کنید تعریف زیر، معادل همان تعریف بالاست.

$$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathbb{E}(Y^{۲}|X) - (\mathbb{E}(Y|X))^{۲}$$

ب) فرض کنید $X$ و $Y$ و $Z$ سه متغیر تصادفی روی یک فضای احتمال باشند. قانون واریانس کل بیان می‌کند:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X|Z]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X|Z]]$$

این قانون را اثبات کنید.
پ) ثابت کنید اگر قانون واریانس کل را روی واریانس شرطی اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\mathrm{Var}[X|Y] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X|Z,Y]|Y] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X|Z,Y]|Y]$$

### حل.

الف) برای حل این سوال ابتدا طبق تعریف امید ریاضی را به انتگرال تبدیل میکنیم و انتگرال را به صورت حاصل جمع سه انتگرال در می آوریم. حاصل هر یک از انتگرال ها را به دست آورده و با هم جمع میکنیم.

$$\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^{۲}|X) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbb{E}(Y|X))^{۲} P(y|X)dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{۲} P(y|X)dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}^{۲}(Y|X)P(y|X)dy - ۲\int_{-\infty}^{\infty} y\mathbb{E}(Y|X)P(y|X)dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{۲} P(y|X)dy + \mathbb{E}^{۲}(Y|X)\int_{-\infty}^{\infty} P(y|X)dy - ۲\mathbb{E}(Y|X)\int_{-\infty}^{\infty} yP(y|X)dy =$$

$$\mathbb{E}(Y^{۲}|X) + \mathbb{E}^{۲}(Y|X) - ۲\mathbb{E}^{۲}(Y|X) = \mathbb{E}(Y^{۲}|X) - (\mathbb{E}(Y|X))^{۲}$$

در نتیجه ثابت شد که دو تعریف ارائه شده معادل هستند.
ب) میدانیم

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^{۲}) - \mathbb{E}^{۲}(X)$$

که آن را میتوان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbb{E}(X^{۲}) = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}^{۲}(X)$$

طبق قانون امید ریاضی کل داریم:

$$\mathbb{E}(X^{۲}) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z) + \mathbb{E}^{۲}(X|Z)]$$

حال از دو طرف $\mathbb{E}^{۲}(X)$ را کم میکنیم:

$$\mathbb{E}(X^{۲}) - \mathbb{E}^{۲}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z) + \mathbb{E}^{۲}(X|Z)] - \mathbb{E}^{۲}(X)$$

طبق قانون امید ریاضی کل:

$$\mathbb{E}(X^{۲}) - \mathbb{E}^{۲}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z) + \mathbb{E}^{۲}(X|Z)] - \mathbb{E}^{۲}(\mathbb{E}(X|Z))$$

حال طبق خاصیت خطی بودن امید ریاضی:

$$\mathbb{E}(X^{۲}) - \mathbb{E}^{۲}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z)] + (\mathbb{E}[\mathbb{E}^{۲}(X|Z)] - \mathbb{E}^{۲}(\mathbb{E}(X|Z))$$

طبق تعریف واریانس:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z)] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Z)]$$

در نتیجه قانون واریانس کل اثبات شد.
پ) مشابه قسمت قبل عمل میکنیم:

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}(X^۲|Y) - \mathbb{E}^۲(X|Y)$$

که آن را میتوان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbb{E}(X^۲|Y) = \mathrm{Var}(X|Y) + \mathbb{E}^۲(X|Y)$$

طبق قانون امید ریاضی کل داریم:

$$\mathbb{E}(X^۲|Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z,Y) + \mathbb{E}^۲(X|Z,Y)|Y]$$

حال از دو طرف $\mathbb{E}^۲(X|Y)$ را کم میکنیم:

$$\mathbb{E}(X^۲|Y) - \mathbb{E}^۲(X|Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z,Y) + \mathbb{E}^۲(X|Z,Y)|Y] - \mathbb{E}^۲(X|Y)$$

طبق قانون امید ریاضی کل:

$$\mathbb{E}(X^۲|Y) - \mathbb{E}^۲(X|Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z,Y) + \mathbb{E}^۲(X|Z,Y)|Y] - \mathbb{E}^۲(\mathbb{E}(X|Z,Y)|Y)$$

حال طبق خاصیت خطی بودن امید ریاضی:

$$\mathbb{E}(X^۲|Y) - \mathbb{E}^۲(X|Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z,Y)|Y] + (\mathbb{E}[\mathbb{E}^۲(X|Z,Y)|Y] - \mathbb{E}^۲(\mathbb{E}(X|Z,Y)|Y)$$

طبق تعریف واریانس:

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|Z,Y)|Y] + \mathrm{Var}[\mathbb{E}(X|Z,Y)|Y]$$

در نتیجه قانون واریانس کل برای حالت شرطی نیز ثابت شد.

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۵. کشیدگی

برای متغیر تصادفی $X$، $\mathrm{Kurt}(X)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{Kurt}(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^۴\right] = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^۴]}{(\mathbb{E}[(X-\mu)^۲])^۲}$$

نشان دهید در صورتی که $X \sim \mathcal{N}(۰,\sigma^۲)$، خواهیم داشت: $\mathrm{Kurt}(X) = ۳$.
راهنمایی: $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$

**حل.**

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)|_{t=۰}$$

$$\mu = ۰ \implies M_X(t) = e^{\frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$$

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \sigma^۲ t e^{\frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$$

$$\frac{d^۲}{dt^۲} M_X(t) = \sigma^۴ t^۲ e^{\frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲} + \sigma^۲ e^{\frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲} = \boldsymbol{A(t)}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}M_X(t) = \sigma^6 t^3 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 2\sigma^4 t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \sigma^4 t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^3}{dt^3}M_X(t) = \sigma^6 t^3 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 3\sigma^4 t e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\frac{d^4}{dt^4}M_X(t) = \sigma^8 t^4 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 3\sigma^6 t^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 3\sigma^6 t^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 3\sigma^4 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^4}{dt^4}M_X(t) = \sigma^8 t^4 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 6\sigma^6 t^2 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + 3\sigma^4 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = \boldsymbol{B(t)}$$

$$Kurt(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{(\mathbb{E}[(X-\mu)^2])^2} = \frac{\mathbb{E}[X^4]}{(\mathbb{E}[X^2])^2} = \frac{B(0)}{(A(0))^2}$$

$$Kurt(X) = \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} = 3$$

$\triangleright$

## مسئله‌ی ۶. برشِ چوب

یک تکه چوب به طول $l > 0$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ای را در امتداد طول این تکه چوب در نظر می‌گیریم و از آن نقطه، چوب را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. فرض کنید این نقطه را بر اساس توزیع یکنواخت انتخاب می‌کنیم. اگر $R$ متغیر تصادفی نشان‌دهنده‌ی نسبت طول قسمت درازتر تکه چوب به طول قسمت کوتاه‌تر آن باشد، تابع چگالی احتمال $R$ را به دست آورید.
راهنمایی: ابتدا تابع توزیع تجمعی $R$ را محاسبه کنید.

**حل.** فرض کنید که نقطه تصادفی انتخاب شده از سمت چپ چوب به فاصله $X$ قرار دارد. در نتیجه نسبت بخش بلندتر چوب به بخش کوتاه تر آن برابر است با

$$R = \begin{cases} \frac{\ell - X}{X} & \text{if} \quad X < \frac{\ell}{2}, \\ \frac{X}{\ell - X} & \text{if} \quad X \geqslant \frac{\ell}{2}. \end{cases}$$

حال تابع توزیع تجمعی $R$ برابر است با

$$F_R(r) = P(R \leqslant r) = P\left(\frac{\ell - X}{X} \leqslant r, X < \frac{\ell}{2}\right) + P\left(\frac{X}{\ell - X} \leqslant r, X \geqslant \frac{\ell}{2}\right).$$

یا به صورت ساده تر:

$$F_R(r) = P\left(\frac{\ell}{r+1} \leqslant X \leqslant \frac{\ell}{2}\right) + P\left(\frac{\ell}{2} \leqslant X \leqslant \frac{r\ell}{r+1}\right),$$

$$F_R(r) = P\left(\frac{\ell}{r+1} \leqslant X \leqslant \frac{r\ell}{r+1}\right).$$

چون $X$ به طور تصادفی و یکنواخت در طول چوب توزیع شده است، احتمال اینکه $X$ در فاصله $\frac{\ell}{r+1} \leqslant X \leqslant \frac{r\ell}{r+1}$ قرار بگیرد، طول این فاصله تقسیم بر کل طول چوب است، پس

$$F_R(r) = \frac{\frac{r\ell}{\ell} - \frac{\ell}{\ell}}{r+1} - \frac{1}{r+1} = \frac{r-1}{r+1}.$$

که اگر از آن مشتق بگیریم داریم

$$f_R(r) = \frac{d}{dr}F_R(r) = \frac{2}{(r+1)^2}.$$

تمام موارد بالا برای $r \geqslant ۱$ معتبر است، زیرا نسبت R، طول طرف بلندتر به کوتاه‌تر همیشه حداقل ۱ است.

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{۲}{(r+۱)^۲} & \text{if} \quad r \geqslant ۱, \\ ۰ & \text{if} \quad r < ۱. \end{cases}$$

▷

## مسئله‌ی ۷. تابع متغیر تصادفی

فرض کنید $X$ متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۵}{۳۲}x^۴ & \text{if } ۰ < x \leqslant ۲ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال درنظر بگیرید که $Y = X^۲$.

الف) تابع توزیع تجمعی $Y$ را بدست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال $Y$ را بدست آورید.

ج) $\mathbb{E}[Y]$ و $\mathrm{Var}[Y]$ را بدست آورید.

**حل.** الف) برای محاسبه تابع توزیع تجمعی $Y$ که آن را با $F_Y(y)$ می‌دهیم، داریم

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^۲ \leqslant y).$$

از آنجایی که $X$ مقداری بین ۰ تا ۲ می‌گیرد پس $Y$ مقداری بین ۰ تا ۴ می‌گیرد:

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad y < ۰, \\ P(۰ \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) & \text{if} \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۴, \\ ۱ & \text{if} \quad y > ۴. \end{cases}$$

برای بدست آوردن مقدار $P(۰ \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$ از تابع چگالی احتمال $X$ در بازه ۰ تا $\sqrt{y}$ انتگرال میگیریم

$$P(۰ \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = \int_۰^{\sqrt{y}} \frac{۵}{۳۲}x^۴\, dx = \frac{۱}{۳۲}(\sqrt{y})^۵ = \frac{y^{\frac{۵}{۲}}}{۳۲}.$$

پس در نهایت تابع توزیع تجمعی $Y$ به شکل زیر بدست می‌آید.

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad y < ۰, \\ \frac{y^{\frac{۵}{۲}}}{۳۲} & \text{if} \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۴, \\ ۱ & \text{if} \quad y > ۴. \end{cases}$$

ب) حال برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال $Y$ که آن را با $f_Y(y)$ نشان می‌دهیم کافی است که از تابع توزیع تجمعی آن مشتق بگیریم

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^{\frac{۵}{۲}}}{۳۲}\right) = \frac{۵}{۶۴}y^{\frac{۳}{۲}}.$$

این رابطه برای $y$ در بازه ۰ تا ۴ برقرار است. پس درنهایت داریم

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{۵}{۶۴}y^{\frac{۳}{۲}} & \text{if} \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۴, \\ ۰ & \text{otherwise}. \end{cases}$$

ج) برای محاسبه $E[Y]$ داریم

$$E[Y] = \int_{۰}^{۴} y f_Y(y)\,dy = \int_{۰}^{۴} y \frac{۵}{۶۴} y^{\frac{۳}{۲}}\,dy = \frac{۵}{۶۴}\int_{۰}^{۴} y^{\frac{۵}{۲}}\,dy.$$

پس از حل انتگرال به رابطه

$$\int y^{\frac{۵}{۲}}\,dy = \frac{۲}{۷} y^{\frac{۷}{۲}} + C,$$

می‌رسیم که با اعمال بازه انتگرال گیری به پاسخ نهایی زیر می‌رسیم

$$E[Y] = \frac{۵}{۶۴}\left(\frac{۲}{۷} y^{\frac{۷}{۲}}\right)\Bigg|_{۰}^{۴} = \frac{۵}{۶۴}\cdot\frac{۲}{۷}\cdot ۴^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۵}{۶۴}\cdot\frac{۲}{۷}\cdot ۱۲۸ = \frac{۱۲۸۰}{۴۴۸} \approx ۲/۸۵۷.$$

همچنین برای محاسبه $\mathrm{Var}(Y)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^{۲}] - (E[Y])^{۲}.$$

که حاصل $E[Y]$ را داریم پس فقط کافی است که حاصل $E[Y^{۲}]$ را نیز محاسبه کنیم. از آنجایی که $Y = X^{۲}$، $Y^{۲} = (X^{۲})^{۲} = X^{۴}$ پس داریم

$$E[Y^{۲}] = E[X^{۴}] = \int_{۰}^{۲} x^{۴} f_X(x)\,dx.$$

$$E[X^{۴}] = \int_{۰}^{۲} x^{۴}\left(\frac{۵}{۳۲} x^{۴}\right)dx = \int_{۰}^{۲} \frac{۵}{۳۲} x^{۸}\,dx.$$

با حل انتگرال به جواب نهایی $E[Y^{۲}]$ می‌رسیم.

$$\int_{۰}^{۲} \frac{۵}{۳۲} x^{۸}\,dx = \frac{۵}{۳۲}\frac{x^{۹}}{۹}\Bigg|_{۰}^{۲} = \frac{۵}{۳۲}\frac{۲^{۹}}{۹} = \frac{۵}{۳۲}\frac{۵۱۲}{۹} = \frac{۲۵۶۰}{۲۸۸} \approx ۸/۸۸۹.$$

در نهایت برای محاسبه $\mathrm{Var}(Y)$ داریم

$$\mathrm{Var}(Y) = E[Y^{۲}] - (E[Y])^{۲} = ۸/۸۸۹ - ۲/۸۵۷^{۲} \approx ۸/۸۸۹ - ۸/۱۶۸ = ۰/۷۲۱.$$

$\triangleright$

موفق باشید :)