

# آمار و احتمال مهندسی

نیم سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی



دانشکده مهندسی کامپیوتر

زمان تحویل: ۳۰ فروردین

تمرین سری سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## بارمبندی

بارم سوالات به شکل زیر است: (مجموعاً ۱۰۰ نمره)

- سوالات ۱، ۲، ۵ و ۶: هر کدام ۱۰ نمره
- سوال ۳: ۱۸ نمره
- سوال ۴: ۲۱ نمره
- سوال ۷: ۲۱ نمره

### مسئله‌ی ۱. (مجذور شرطی)

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی باشد و  $Y = X^2$  بر حسب آن تعریف شود. درستی عبارت زیر را ثابت کنید:

$$f_Y(y|X \geq 0) = \frac{u(y)}{1 - F_X(0)} \cdot \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},$$

که در آن  $u$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

### مسئله‌ی ۲. (بیمه)

یک شرکت بیمه، خانه‌ها را در سه شهر  $A$ ،  $B$  و  $C$  تحت پوشش خود قرار می‌دهد. می‌دانیم خسارات رخ داده در این شهرها مستقل هستند و توابع مولد گشتاور برای میزان خسارت در هر یک از شهرها به صورت زیر است:

$$M_A(t) = (1 - 2t)^{-3} \quad M_B(t) = (1 - 2t)^{-2/5} \quad M_C(t) = (1 - 2t)^{-4/5}$$

اگر  $X$  مجموع خسارت در هر سه شهر باشد،  $\mathbb{E}(X^3)$  را بدست آورید.

### مسئله‌ی ۳. (درمان)

فرض کنید دو نوع درمان برای سنگ کلیه وجود دارد: درمان  $A$  و درمان  $B$ . همچنین در نظر بگیرید که جدول زیر، احتمال موفقیت این دو نوع درمان را نشان می‌دهد.

درمان B	درمان A	
۰.۸۷	۰.۹۳	سنگ‌های کوچک
۰.۶۸	۰.۷۳	سنگ‌های بزرگ

فرض کنید در کلیه هر بیمار، فقط سنگ‌های کوچک یا سنگ‌های بزرگ موجود است (هیچ بیماری هر دو نوع سنگ را در کلیه خود ندارد) و می‌دانیم احتمال اینکه سنگ‌ها کوچک یا بزرگ باشند، به ترتیب برابر ۰.۶ و ۰.۴ است. پزشکان، بیمارانی را که کلیه آن‌ها شامل سنگ‌های کوچک باشد، در ۲۰٪ مواقع با روش  $A$  درمان می‌کنند. آن‌ها همچنین بیمارانی را که کلیه آن‌ها شامل سنگ‌های بزرگ باشد، در ۸۰٪ مواقع با روش  $A$  درمان می‌کنند. اگر برای درمان یک بیمار از روش  $A$  استفاده نشود، حتماً روش  $B$  تجویز خواهد شد.

الف) اگر برای یک بیمار روش  $A$  تجویز شده باشد، احتمال موفقیت درمان چقدر است؟

ب) اگر برای یک بیمار روش  $B$  تجویز شده باشد، احتمال موفقیت درمان چقدر است؟

پ) به نظر شما کدام درمان بهتر است؟

#### مسئله‌ی ۴. (واریانس حرفه‌ای)

الف) واریانس  $Y$  به شرط  $X$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Var}(Y|X) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X).$$

ثابت کنید تعریف زیر، معادل همان تعریف بالاست.

$$\text{Var}(Y|X) = \mathbb{E}(Y^2|X) - (\mathbb{E}(Y|X))^2$$

ب) فرض کنید  $X$  و  $Y$  و  $Z$  سه متغیر تصادفی روی یک فضای احتمال باشند. قانون واریانس کل بیان می‌کند:

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\mathbb{E}[X|Z]] + \mathbb{E}[\text{Var}[X|Z]]$$

این قانون را اثبات کنید.

پ) ثابت کنید اگر قانون واریانس کل را روی واریانس شرطی اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{Var}[X|Y] = \text{Var}[\mathbb{E}[X|Z, Y]|Y] + \mathbb{E}[\text{Var}[X|Z, Y]|Y]$$

#### مسئله‌ی ۵. (کشیدگی)

برای متغیر تصادفی  $X$ ،  $\text{Kurt}(X)$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{Kurt}(X) = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{(\mathbb{E}[(X - \mu)^2])^2}$$

نشان دهید در صورتی که  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ، خواهیم داشت:  $\text{Kurt}(X) = 3$ .

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$
 راهنمایی:

#### مسئله‌ی ۶. (برش چوب)

یک تکه چوب به طول  $l > 0$  را در نظر بگیرید. نقطه‌ای را در امتداد طول این تکه چوب در نظر می‌گیریم و از آن نقطه، چوب را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. فرض کنید این نقطه را بر اساس توزیع یکنواخت انتخاب می‌کنیم. اگر  $R$  متغیر تصادفی نشان‌دهنده‌ی نسبت طول قسمت درازتر تکه چوب به طول قسمت کوتاه‌تر آن باشد، تابع چگالی احتمال  $R$  را به دست آورید.

راهنمایی: ابتدا تابع توزیع تجمعی  $R$  را محاسبه کنید.

## مسئله ۷. (تابع متغیر تصادفی)

فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{32}x^4 & \text{if } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال در نظر بگیرید که  $Y = X^2$ .

الف) تابع توزیع تجمعی  $Y$  را بدست آورید.

ب) تابع چگالی احتمال  $Y$  را بدست آورید.

ج)  $\mathbb{E}[Y]$  و  $\text{Var}[Y]$  را بدست آورید.