آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم

زمان تحویل: ۱۳ اردیبهشت

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به شکل زیر است: (مجموعا ۱۰۰ نمره)

- سوال ۱: ۱۰ نمره
- سوالات ۲ الی ۶: هر کدام ۱۲ نمره
- سوالات ۷ و ۸: هر کدام ۱۵ نمره

مسئله‌ی ۱. (چگالی توام)

اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X < x|Y = y)$ را بیابید.

پاسخ

ابتدا توزیع شرطی X را در صورتی که $Y = y$ باشد به دست می‌آوریم.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{e^{-y}\int_0^\infty (1/y)e^{-x/y}dx} = \frac{1}{y}e^{-x/y}$$

پس داریم،

$$P\{X < x|Y = y\} = \int_0^x \frac{1}{y}e^{-x/y}dx$$
$$= -e^{-x/y}\Big|_0^x = 1 - e^{-x/y}$$

مسئله‌ی ۲. (مجموع توام)

تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است. تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی خواسته‌شده را پیدا کنید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 \leqslant x, y \leqslant 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) $X + Y$

ب) XY

پ) $\dfrac{Y}{X}$

پاسخ

الف)

$$Z_1 = X + Y$$

$$F_{Z_1}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leqslant z) = \begin{cases} \int_0^z \int_0^{z-y} f_{XY}(x,y)\ dxdy & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 - \int_0^z \int_{z-1}^1 f_{XY}(x,y)\ dxdy & 1 \leqslant z \leqslant 2 \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \int_0^z f_{XY}(z-y,y)\ dy & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \int_{z-1}^1 f_{XY}(z-y,y)\ dy & 1 \leqslant z \leqslant 2 \end{cases}$$

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} z^2 & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ z(2-z) & 1 \leqslant z \leqslant 2 \\ 0 & O.W. \end{cases}$$

ب)

$$Z_2 = XY$$

$$F_{Z_2}(z) = \mathbb{P}(XY \leqslant z) = 1 - \int_z^1 \int_{\frac{z}{y}}^1 f_{XY}(x,y)\ dxdy$$

$$f_{Z_2}(z) = \int_z^1 \frac{1}{y} f_{XY}(\frac{z}{y}, y) dy = \int_z^1 \frac{1}{y}(\frac{z}{y} + y) dy = 2(1-z), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

ج)

$$Z_3 = \frac{Y}{X}$$

$$F_{Z_3}(z) = \mathbb{P}(\frac{Y}{X} \leqslant z) = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{zx} f_{XY}(x,y)\ dxdy & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{z}} f_{XY}(x,y)\ dxdy & 1 \leqslant z \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \int_0^1 x f_{XY}(x, zx)\ dy & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \int_0^1 \frac{y}{z^2} f_{XY}(\frac{y}{z}, y)\ dy & 1 \leqslant z \end{cases}$$

$$f_{Z_3}(z) = \begin{cases} \frac{1+z}{3} & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ \frac{1+z}{3z^3} & 1 \leqslant z \end{cases}$$

مسئله‌ی ۳. (یکنواخت شرطی)

X یک متغیر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_X(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در صورت برقراری شرط $X = x$، متغیر تصادفی Y از توزیع یکنواخت در بازه ی $[-x, x]$ پیروی میکند. مطلوب است:

الف) $f_{XY}(x, y)$

ب) $f_Y(y)$

ج) $\mathbb{P}(|Y| < X^۳)$

پاسخ

الف) با توجه به این که $Y|X = x$ از توزیع یکنواخت در بازه $[-x, x]$ پیروی می کند، میتوان نوشت:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲x} & -x \leqslant y \leqslant x \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

حال طبق تابع چگالی حاشیه ای $f_X(x)$ داده شده و تعریف توزیع توام، داریم:

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leqslant x \leqslant ۱, -x \leqslant y \leqslant x \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

که فرم بسته و ساده شده آن به صورت زیر می شود:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ۱ & |y| \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

ب) طبق نتیجه به دست آمده در قسمت قبل و با توجه به این که $|y| \leqslant ۱$ و تعریف توزیع حاشیه ای می توان نوشت:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

$$= \int_{|y|}^{۱} ۱ dx = ۱ - |y|$$

که در نتیجه فرم بسته تابع چگالی حاشیه ای برای Y به صورت زیر می شود:

$$f_Y(y)\begin{cases} ۱-|y| & |y|\leqslant ۱\\ ۰ & O.W.\end{cases}$$

ج) برای پیدا کردن $P(|Y|<X^۳)$ از قانون احتمال کل استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} P(|Y|<X^۳) &= \int_۰^۱ P(|Y|<X^۳|X=x)f_X(x)dx\\ &= \int_۰^۱ P(|Y|<X^۳|X=x)۲xdx\\ &= \int_۰^۱ \left(\frac{۲x^۳}{۲x}\right)۲xdx \quad (Y|X=x \;\sim\; Uniform(-x,x))\\ &= ۱/۲ \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۴. (زنبور عسل)

طول عمر یک نوع زنبور عسل از توریع نمایی با میانگین ۴۵ روز تبعیت می‌کند.
الف) انحراف معیار عمر این نوع زنبور عسل را به دست آورید.
ب) احتمال اینکه یک زنبور عسل بیش از ۴۷ روز عمر کند چقدر است؟
ج) فرض کنید از این نوع زنبور ۱۰۰۰ گونه جمع‌آوری کرده‌ایم. احتمال اینکه میانگین طول عمر این ۱۰۰۰ زنبور بیشتر از ۴۷ روز باشد چقدر است؟
د) به ازای چه طول عمری احتمال آنکه میانگین طول عمر ۱۰۰۰ زنبور عسل از آن کمتر باشد، ۱۰ درصد است؟

پاسخ

(آ) توزیع احتمال نمایی، تابع چگالی احتمال $f(x)=ae^{-ax}, x\in[۰,\infty[$ با میانگین و انحراف از معیار برابر با $\frac{۱}{a}$ را دارد. بنابراین انحراف از معیار برای طول عمر این نوع زنبور برابر با ۴۵ می‌باشد.

(ب) با توجه به این که طول عمر زنبور از توزیع نمایی تبعیت می‌کند داریم:

$$\begin{aligned} P(X>۴۷) &= \int_{۴۷}^{\infty}\frac{۱}{۴۵}e^{-\frac{۱}{۴۵}x}dx = ۱-\int_۰^{۴۷}\frac{۱}{۴۵}e^{-\frac{۱}{۴۵}x}dx = ۱-\left[-e^{-\frac{۱}{۴۵}x}\right]_۰^{۴۷} = ۱+e^{-\frac{۱}{۴۵}(۴۷)}-e^{-\frac{۱}{۴۵}(۰)}\\ &= ۱+e^{-\frac{۴۷}{۴۵}}-۱ = e^{-\frac{۴۷}{۴۵}} \approx ۰/۳۵۱۹ \end{aligned}$$

(ج) با توجه به قضیه حد مرکزی برای $n=۱۰۰۰$ داریم:

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{۴۷-۴۵}{۴۵/\sqrt{۱۰۰۰}} \approx ۱/۴۱$$

$$P(\bar{X}\geqslant ۴۷)=P(Z\geqslant ۱/۴۱)=۱-P(Z\leqslant ۱/۴۱)=۱-۰/۹۲۰۷=۰/۰۷۹۳$$

(د) با توجه به جدول توزیع نرمال، نزدیک ترین عددی که میتوانیم به ۱۰۰۰/۰ داشته باشیم برابر است با

$\cdot/\text{۱۰۰۳} = P(Z < -\text{۱/۲۸})$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \Rightarrow -\text{۱/۲۸} = \frac{\bar{x} - \text{۴۵}}{\text{۴۵}/\sqrt{\text{۱۰۰۰}}} \Rightarrow \bar{x} = -\text{۱/۲۸}\left(\frac{\text{۴۵}}{\sqrt{\text{۱۰۰۰}}}\right) + \text{۴۵} \approx \text{۴۳/۱۸}\ \text{روز}$$

مسئله‌ی ۵. (درآمد دلاری)

شما ۱ دلار می‌پردازید تا در یک بازی شرکت کنید که در آن یک تاس استاندارد شش‌رو را به چرخش درمی‌آورید. اگر عدد تاس ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد، دلارتان را از دست می‌دهید. اگر عدد تاس ۵ باشد، دلار خود را پس می‌گیرید، و اگر عدد تاس ۶ باشد، نه تنها دلار خود را پس می‌گیرید، بلکه ۲ دلار اضافه هم به دست می‌آورید (مجموعا ۳ دلار).

X	۲	۰	۱−
$P(X = x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۳}$

الف) میانگین و انحراف معیار را برای یک بار پرتاب محاسبه کنید. (حتماً دلاری که برای شرکت در بازی پرداخت می‌کنید را در نظر بگیرید.)

ب) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، میانگین و خطای استاندارد برای توزیع نمونه چقدر است؟

ج) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، احتمال اینکه میانگین نتیجه شما مثبت باشد چقدر است؟ (یعنی شما با مقدار پولی بیشتر از آنچه که قبل از بازی داشتید، از بازی خارج می‌شوید.)

د) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، میانگین میزان پولی که برنده می‌شوید، با احتمال ۹۰ درصد کمتر از چه مقداری است؟

پاسخ

الف) برای محاسبه مقدار مورد انتظار ($E[X]$) و انحراف معیار (σ) برای یک بار پرتاب، از توزیع احتمال داده شده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E[X] &= (-\text{۱}) \cdot \frac{\text{۲}}{\text{۳}} + (\text{۰}) \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۶}} + (\text{۲}) \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۶}} \\ &= -\frac{\text{۲}}{\text{۳}} + \text{۰} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \\ &= -\frac{\text{۱}}{\text{۳}} \end{aligned}$$

حالا، بیایید ابتدا واریانس را محاسبه کنیم:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= (-1)^2 \cdot \frac{2}{3} + (0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{11}{9}
\end{aligned}
$$

سپس، انحراف معیار:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{11}{9}} \approx \sqrt{\frac{11}{9}} \approx 1.05$$

پس، برای یک بار پرتاب، مقدار مورد انتظار $-\frac{1}{3}$ دلار است و انحراف معیار تقریباً ۱٫۰۵ دلار است.

ب) مقدار مورد انتظار برای ۱۰۰ بار پرتاب برابر خواهد بود با $100 \times E[X] = 100 \times (-\frac{1}{3}) = -\frac{100}{3}$ دلار.

خطای استاندارد برای توزیع نمونه‌ای توسط $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ داده می‌شود، که در آن σ انحراف معیار برای یک بار پرتاب و n تعداد پرتاب‌هاست.

بنابراین، خطای استاندارد برای ۱۰۰ بار پرتاب برابر خواهد بود با $\frac{1.05}{\sqrt{100}} = \frac{1.05}{10} = 0.105$ دلار.

د) توجه شود:

$$E[X] = -\frac{1}{3}, \quad \text{Var}(X) = \frac{11}{9}, \quad n = 100$$

طبق قضیه حد مرکزی (CLT)، برای اعداد بزرگ n، میانگین نمونه $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ تقریباً از یک توزیع نرمال با میانگین $\mu = -\frac{1}{3}$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{11}{9}}{100} = \frac{11}{900}$ پیروی می‌کند.

استاندارد کردن متغیر:

$$Z = \frac{\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{100}\right) + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{11}{900}}}$$

این تبدیل باعث می‌شود متغیر Z از یک توزیع نرمال استاندارد ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$) پیروی کند.

ما باید $P\left(Z > \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{900}{11}}\right)$ را پیدا کنیم که معادل با $P(Z > 3.02)$ است. با استفاده از جدول یا ماشین حساب توزیع نرمال استاندارد، $P(Z > 3.02) \approx 0.0012639$ را به دست می‌آوریم.

بنابراین، $P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} > 0\right) \approx 0.0012639$.

ج) توجه شود:

$$E[X] = -\frac{1}{3}, \quad \text{Var}(X) = \frac{11}{9}, \quad n = 100$$

طبق قضیه حد مرکزی (CLT)، برای اعداد بزرگ n، میانگین نمونه $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ تقریباً از یک توزیع نرمال با میانگین

$\mu = -\frac{۱}{۳}$ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n} = \frac{\frac{۱۱}{۹}}{۱۰۰} = \frac{۱۱}{۹۰۰}$ پیروی می‌کند.

استاندارد کردن متغیر:

$$Z = \frac{\left(\frac{X_۱+\dots+X_n}{۱۰۰}\right) + \frac{۱}{۳}}{\sqrt{\frac{۱۱}{۹۰۰}}}$$

این تبدیل باعث می‌شود متغیر Z از یک توزیع نرمال استاندارد ($Z \sim \mathcal{N}(۰,۱)$) پیروی کند.

برای پیدا کردن مقدار $\frac{X_۱+\dots+X_n}{n}$ زیر که ۹۰٪ از احتمال در زیر آن قرار دارد، ما باید امتیاز متناظر Z را از جدول توزیع نرمال استاندارد پیدا کنیم.

از جدول یا ماشین حساب توزیع نرمال استاندارد، متوجه می‌شویم که Z متناظر با $P(Z < z) = ۰/۹$ تقریباً ۱/۲۸۱۵۵۲ است.

حالا، از این امتیاز Z برای پیدا کردن مقدار متناظر برای $\frac{X_۱+\dots+X_n}{n}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{X_۱+\dots+X_n}{n} < -\frac{۱}{۳} + ۱/۲۸۱۵۵۲ \times \sqrt{\frac{۱۱}{۹۰۰}}$$

$$\frac{X_۱+\dots+X_n}{n} < -\frac{۱}{۳} + \frac{۱/۲۸۱۵۵۲}{۳} \times \sqrt{\frac{۱۱}{۹۰۰}}$$

$$\frac{X_۱+\dots+X_n}{n} < -\frac{۱}{۳} + \frac{۱/۲۸۱۵۵۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۱۱}}{۳۰}$$

$$\frac{X_۱+\dots+X_n}{n} < -\frac{۱}{۳} + ۰/۱۴۹۶۰۵۱$$

$$\frac{X_۱+\dots+X_n}{n} < -۰/۱۸۳۳۹۴۹$$

مسئله‌ی ۶. (گوسی توام)

فرض کنید Y و W متغیرهای تصادفی توام گوسی باشند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\mathbb{E}[Y] = ۲ \quad \mathbb{E}[W] = ۰ \quad \mathrm{Var}(Y) = ۱۶ \quad \mathrm{Var}(W) = ۴$$

اگر ضریب همبستگی ۰.۲۵ باشد، با در نظر گرفتن متغیر تصادفی $X = ۳Y + W + ۳$، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقادیر $\mathbb{E}[X]$ و $\mathrm{Var}(X)$ را به دست آورید.

ب) مقدار عددی $\mathbb{P}(X \geqslant ۲۰)$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}[Y|X]$ را به صورت تابعی از X به دست آورید.

ت) میانگین خطای مربعات، یعنی $\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}[Y|X])^{۲}]$ را محاسبه کنید.

پاسخ

(آ) داریم

$$E[X]=E[3Y+W+3]=3E[Y]+E[W]+3=9$$

همچنین از $Cov(Y,W)=\rho\sigma_Y\sigma_W=(۰/۲۵)(۴)(۲)=۲$ استفاده می کنیم و

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(3Y+W+3) \\ &= 9\,Var(Y)+Var(W)+2\cdot 3Cov(Y,W) \\ &= 144+4+12=160 \end{aligned}$$

(ب) چون X یک ترکیب خطی از متغیر های تصادفی گاووسی توام است، X نیز گاووسی است، پس

$$P\{X\geqslant 20\}=P\left\{\frac{X-9}{\sqrt{160}}\geqslant\frac{20-9}{\sqrt{160}}\right\}=Q\left(\frac{20-9}{\sqrt{160}}\right)=Q(0.8696)=0.192$$

(ج) از آنجایی که X و Y ترکیب خطی از متغیر های تصادفی گاووسی توام X و W هستند، پس خود آنان نیز توما گاووسی هستند، پس

$$E[Y|X]=\widehat{E}[Y|X]=E[Y]+\frac{Cov(Y,X)}{Var(X)}(X-E[X])$$

با توجه به:

$$Cov(Y,X)=Cov(Y,3Y+W+3)=3\,Var(Y)+Cov(Y,W)=48+2=50$$

به این نتیجه می رسیم که:

$$E[Y|X]=\widehat{E}[Y|X]=2+\frac{50}{160}(X-9)$$

(د) داریم

$$MSE=Var(Y)-\frac{(Cov(Y,X))^2}{Var(X)}=16-\frac{(50)^2}{160}=0.375$$

مسئله‌ی ۷. (تشخیص هرزنامه)

علی در هر لحظه حداکثر ۱ ایمیل دریافت می‌کند. فرض کنید T_n یک متغیر تصادفی پیوسته و نشان‌دهنده زمانی باشد که ایمیل nـام به علی می‌رسد. همچنین در نظر بگیرید که زمان انتظار بین رسیدن ایمیل‌ها تعدادی متغیر تصادفی مستقل و با توزیع یکسان (i.i.d) مانند $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ باشند که همگی از توزیع $\mathrm{Exp}(\lambda)$ پیروی می‌کنند. هر ایمیل با احتمال p سالم و با احتمال $q = 1 - p$ هرزنامه است و این موضوع، ارتباطی به بقیه ایمیل‌ها یا زمان‌های انتظار برای رسیدن آن‌ها ندارد.

فرض کنید X متغیر تصادفی نشان‌دهنده زمانی باشد که اولین ایمیل سالم به علی می‌رسد. لذا X یک متغیر پیوسته خواهد بود و برای مثال اگر اولین ایمیل سالم باشد، خواهیم داشت $X = T_1$. به همین ترتیب، اگر اولین ایمیل هرزنامه و دومین ایمیل سالم باشد، خواهیم داشت $X = T_2$.

الف) امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.

ب) تابع مولد گشتاور X را به دست آورید. سپس بیان کنید که بر اساس این تابع، X از چه توزیعی پیروی می‌کند؟

پاسخ

(الف)

برای پیدا کردن امید ریاضی و واریانس X به این صورت عمل می‌کنیم که:
عبارت $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ را می‌نویسیم (در این‌جا منظور از N، تعداد ایمیل‌های تا قبل از اولین ایمیل غیر هرز به علاوه خود اولین ایمیل سالم می‌باشد) که در آن X_j زمان سپری شده از ایمیل $j - 1$ ام تا ایمیل j ام است. دقت شود که $j \geqslant 2$ و $X_1 = T_1$. بنابراین $N - 1 \sim Geom(p)$، پس می‌توان گفت

$$E(X) = E(E(X|N)) = E(N\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{p\lambda}.$$

همچنین:

$$Var(X) = E(Var(X|N)) + Var(E(X|N)) = E(N\frac{1}{\lambda^2}) + Var(N\frac{1}{\lambda}),$$

که معادل عبارت زیر است:

$$\frac{1}{p\lambda^2} + \frac{1-p}{p^2\lambda^2} = \frac{1}{p^2\lambda^2}$$

(ب)

اگر تابع مولد گشتاور را به شرط N بنویسیم، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$E(e^{tx}) = E(E(e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_N}|N)) = E(E(e^{tX_1}|N)E(e^{tX_2}|N)\ldots E(e^{tX_N}|N)) = E(M_1(t)^N),$$

که در عبارت بالا، $M_1(t)$ تابع مولد گشتاور X_1 است (دقت شود که $\frac{\lambda}{\lambda - t}$ برای $t < \lambda$). حال با توجه به تعریف امید ریاضی و این که $q = 1 - p$ است، داریم (در واقع صرفا جواب عبارت قبلی را باز می‌کنیم):

$$p\sum_{n=1}^{\infty} M_1(t)^n q^{n-1} = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty}(qM_1(t))^n = \frac{p}{q}\frac{qM_1(t)}{1-qM_1(t)} = \frac{\frac{p\lambda}{\lambda-t}}{1-\frac{q\lambda}{\lambda-t}} = \frac{p\lambda}{p\lambda-t}$$

به ازای $t < p\lambda$ (زیرا نیاز است تا $qM_1(t) < 1$ باشد تا دنباله همگرا شود) جواب بدست آمده در بالا همان تابع مولد گشتاور توزیع نمایی با پارامتر $p\lambda$ است پس می‌توان گفت $X \sim Expo(p\lambda)$.

مسئله‌ی ۸. (جریان)

زمانی که یک جریان I (بر حسب آمپر) از یک مقاومت R (بر حسب اهم) عبور می‌کند، توان تولیدشده از طریق رابطه $W = I^2R$ (بر حسب وات) به دست می‌آید. فرض کنید I و R متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_I(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$f_R(x) = 2x \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

الف) تابع چگالی احتمال W را به دست آورید.

ب) امید ریاضی W را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) با توجه به $F_I(x)$ و $F_R(x)$ داریم:

$$f_{I,R}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x), & \text{if} \quad 0 \leqslant x, y \leqslant 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

بدین‌ترتیب به ازای هر $0 \leqslant a \leqslant 1$ داریم:

$$\begin{aligned} F_W(a) &= P\{W \leqslant a\} = P\{I^2R \leqslant a\} \\ &= \iint\limits_R f_{1,R}(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

منطقه‌ی R ناحیه ای است به‌طوری که در داخل مربع $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$ قرار دارد و زیر منحنی $y = a/x^2$ است. پس $F_W(a)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} F_W(a) &= \int_0^a \int_0^1 12xy(1-x)dx\,dy + \int_a^1 \int_0^{\sqrt{a/y}} 12xy(1-x)dx\,dy \\ &= a^2 + 6a(1-a) - 8a^{3/2}(1-a^{1/2}) \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $W \geqslant 0$ است، به ازای $a < 0$، $F_W(a) = 0$ می‌شود. همچنین به شکل مشابه، به ازای $a > 1$، $F_W(a) = 1$ می‌شود. پس داریم:

$$f_W(a) = F'_W(a) = \begin{cases} ۶a - ۱۲\sqrt{a} + ۶, & \text{if} \quad ۰ \leqslant a \leqslant ۱, \\ ۰, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ب) برای محاسبه‌ی $E[W]$ نیز به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$E[W] = \int_۰^۱ (۶a^۲ - ۱۲a^{۳/۲} + ۶a)da = -۳.$$