آمار و احتمال مهندسی

نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

مدرس: دکتر امیر نجفی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم

زمان تحویل: ۱۳ اردیبهشت

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص‌شده است.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

بارم‌بندی

بارم سوالات به شکل زیر است: (مجموعا ۱۰۰ نمره)

- سوال ۱: ۱۰ نمره
- سوالات ۲ الی ۶: هر کدام ۱۲ نمره
- سوالات ۷ و ۸: هر کدام ۱۵ نمره

مسئله‌ی ۱. (چگالی توام)

اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X < x | Y = y)$ را بیابید.

مسئله‌ی ۲. (مجموع توام)

تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است. تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی خواسته‌شده را پیدا کنید.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leqslant x, y \leqslant 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) $X + Y$

ب) XY

پ) $\dfrac{Y}{X}$

مسئله‌ی ۳. (یکنواخت شرطی)

X یک متغیر تصادفی پیوسته است که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در صورت برقراری شرط $X = x$، متغیر تصادفی Y از توزیع یکنواخت در بازه ی $[-x, x]$ پیروی میکند. مطلوب است:

الف) $f_{XY}(x,y)$

ب) $f_Y(y)$

ج) $\mathbb{P}(|Y| < X^3)$

مسئله‌ی ۴. (زنبور عسل)

طول عمر یک نوع زنبور عسل از توریع نمایی با میانگین ۴۵ روز تبعیت می‌کند.
الف) انحراف معیار عمر این نوع زنبور عسل را به دست آورید.
ب) احتمال اینکه یک زنبور عسل بیش از ۴۷ روز عمر کند چقدر است؟
ج) فرض کنید از این نوع زنبور ۱۰۰۰ گونه جمع‌آوری کرده‌ایم. احتمال اینکه میانگین طول عمر این ۱۰۰۰ زنبور بیشتر از ۴۷ روز باشد چقدر است؟
د) به ازای چه طول عمری احتمال آنکه میانگین طول عمر ۱۰۰۰ زنبور عسل از آن کمتر باشد، ۱۰ درصد است؟

مسئله‌ی ۵. (درآمد دلاری)

شما ۱ دلار می‌پردازید تا در یک بازی شرکت کنید که در آن یک تاس استاندارد شش‌رو را به چرخش درمی‌آورید. اگر عدد تاس ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد، دلارتان را از دست می‌دهید. اگر عدد تاس ۵ باشد، دلار خود را پس می‌گیرید، و اگر عدد تاس ۶ باشد، نه تنها دلار خود را پس می‌گیرید، بلکه ۲ دلار اضافه هم به دست می‌آورید (مجموعا ۳ دلار).

X	۲	۰	-۱
$P(X = x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۳}$

الف) میانگین و انحراف معیار را برای یک بار پرتاب محاسبه کنید. (حتماً دلاری که برای شرکت در بازی پرداخت می‌کنید را در نظر بگیرید.)

ب) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، میانگین و خطای استاندارد برای توزیع نمونه چقدر است؟

ج) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، احتمال اینکه میانگین نتیجه شما مثبت باشد چقدر است؟ (یعنی شما با مقدار پولی بیشتر از آنچه که قبل از بازی داشتید، از بازی خارج می‌شوید.)

د) اگر شما ۱۰۰ بار بازی کنید، میانگین میزان پولی که برنده می‌شوید، با احتمال ۹۰ درصد کمتر از چه مقداری است؟

مسئله‌ی ۶. (گوسی توام)

فرض کنید Y و W متغیرهای تصادفی توام گوسی باشند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\mathbb{E}[Y] = ۲ \quad \mathbb{E}[W] = ۰ \quad \mathrm{Var}(Y) = ۱۶ \quad \mathrm{Var}(W) = ۴$$

اگر ضریب همبستگی ۰.۲۵ باشد، با در نظر گرفتن متغیر تصادفی $X = ۳Y + W + ۳$، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقادیر $\mathbb{E}[X]$ و $\mathrm{Var}(X)$ را به دست آورید.

ب) مقدار عددی $\mathbb{P}(X \geqslant ۲۰)$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار $\mathbb{E}[Y|X]$ را به صورت تابعی از X به دست آورید.

ت) میانگین خطای مربعات، یعنی $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^۲]$ را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۷. (تشخیص هرزنامه)

علی در هر لحظه حداکثر ۱ ایمیل دریافت می‌کند. فرض کنید T_n یک متغیر تصادفی پیوسته و نشان‌دهنده زمانی باشد که ایمیل nـام به علی می‌رسد. همچنین در نظر بگیرید که زمان انتظار بین رسیدن ایمیل‌ها تعدادی متغیر تصادفی مستقل و با توزیع یکسان (i.i.d) مانند $T_۱, T_۲ - T_۱, T_۳ - T_۲, \ldots$ باشند که همگی از توزیع $\mathrm{Exp}(\lambda)$ پیروی می‌کنند. هر ایمیل با احتمال p سالم و با احتمال $q = ۱ - p$ هرزنامه است و این موضوع، ارتباطی به بقیه ایمیل‌ها یا زمان‌های انتظار برای رسیدن آن‌ها ندارد.

فرض کنید X متغیر تصادفی نشان‌دهنده زمانی باشد که اولین ایمیل سالم به علی می‌رسد. لذا X یک متغیر پیوسته خواهد بود و برای مثال اگر اولین ایمیل سالم باشد، خواهیم داشت $X = T_۱$. به همین ترتیب، اگر اولین ایمیل هرزنامه و دومین ایمیل سالم باشد، خواهیم داشت $X = T_۲$.

الف) امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.

ب) تابع مولد گشتاور X را به دست آورید. سپس بیان کنید که بر اساس این تابع، X از چه توزیعی پیروی می‌کند؟

مسئله‌ی ۸. (جریان)

زمانی که یک جریان I (بر حسب آمپر) از یک مقاومت R (بر حسب اهم) عبور می‌کند، توان تولیدشده از طریق رابطه $W = I^۲R$ (بر حسب وات) به دست می‌آید. فرض کنید I و R متغیرهای تصادفی مستقل با توابع چگالی احتمال زیر باشند:

$$f_I(x) = ۶x(۱ - x) \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

$$f_R(x) = ۲x \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$$

الف) تابع چگالی احتمال W را به دست آورید.

ب) امید ریاضی W را محاسبه کنید.